INTERVALLUMFÜGGVÉNYEK EGY TULAJDONSÁGÁRÓL

Írta: SZERÉNYI TIBOR

1. Fejes Tóth László [1] dolgozatában írja a következőket: könnyű belátni, hogy ha $k = k(s)$ $(0 \leqq s \leqq L)$ egy síkgörbe természetes egyenlete, akkor bármilyen n pozitív egész számra megadható a görbének olyan $T_1, \ldots, T_n$ részívekre való felbontása, hogy

$$k_1^{(p+1)} s_1^{p+3} = \cdots = k_n^{(p+1)} s_n^{p+3},$$

ahol $s_i (i = 1, \ldots, n)$ jelenti T_i hosszát, $k_i^{(p+1)}$ pedig a $k = k(s)$ függvénynek a $(p+1)$-edik (p pozitív egész szám) differenciálhányadosának a T_i középpontjában felvett értéke, továbbá a vizsgált íven $k^{(p+1)}(s) \neq 0$. E bizonyítás nélkül felhasznált tény nem látszik annyira nyilvánvalónak, hogy pontos bizonyítást ne kívánna.

Hasonló problémát vet fel a *Mathemetica Scandinavica* 1 (1953) kötetének a 171. oldalán található 1. feladatában S. Bundgaard. A feladat így szól: egy metrikus térben adott egy $x = x(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ folytonos görbe és n pozitív egész szám. Léteznek-e oly $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ paraméterértékek, amelyekre

$$d(x(t_0), x(t_1)) = \cdots = d(x(t_{n-1}), x(t_n)),$$

ahol $d(x, y)$ az x, y pontok távolságát jelenti. A feladat megoldását B. Fuglede és B. Jessen [2] dolgozatában közli. Dolgozatukban bebizonyítják, hogy ilyen paraméterértékek mindig léteznek, ha a görbe nem zárt; példával mutatják meg, hogy zárt görbe esetén viszont ilyen paraméterértékek létezése általában nem állítható.

Dolgozatunk a fenti problémáknak egy nagyon kézenfekvő általánosításával foglalkozik. Eredményünkből következni fog a Fejes Tóth által bizonyítás nélkül felhasznált, fentebb említett állítás.

2. Eredményünk megfogalmazásához előre kell bocsátanunk a következőket.

Egy $[a, b]$ intervallumon értelmezett intervallumfüggvényen olyan szabályt értünk, amely az $[a, b]$ intervallum minden $[\alpha, \beta]$ $(a \leqq \alpha \leqq \beta \leqq b)$ részintervallumához hozzárendel egy valós számot, melyet $f(\alpha, \beta)$-val jelölünk. Az $[a, b]$ intervallumon értelmezett $f(\alpha, \beta)$ intervallumfüggvényt folytonosnak nevezzük, ha 1. $\alpha \to \alpha_0$, $\beta \to \beta_0$ $(a \leqq \alpha \leqq \beta \leqq b)$, akkor $f(\alpha, \beta) \to f(\alpha_0, \beta_0)$; 2. $\alpha = \beta$, akkor $f(\alpha, \beta) = 0$.

Be fogjuk bizonyítani a következő tételt:

Ha $f(\alpha, \beta)$ egy $[a, b]$ intervallumon értelmezett folytonos intervallumfüggvény és n természetes szám, továbbá $f(a, b) \neq 0$, akkor van az $[a, b]$ intervallumnak olyan $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n = b$ beosztása, melyre fennáll:

$$f(\alpha_0, \alpha_1) = \cdots = f(\alpha_{n-1}, \alpha_n).$$

Mielőtt a tétel bizonyításához hozzáfognánk, megjegyezzük, hogy a Svend Bundgaard által kitűzött feladatban az

$$f(\alpha, \beta) = d(x(\alpha), x(\beta)) \quad (0 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq 1),$$

míg Fejes Tóth dolgozatában az

$$f(\alpha, \beta) = k^{(p+1)}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)(\beta-\alpha)^{p+3} \quad (0 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq L)$$

intervallumfüggvényről van szó, melyekre teljesülnek tételünk feltételei.

Megemlítjük még, hogy ha a tétel feltételei mellett $f(\alpha, \beta)$-ra még az is igaz, hogy $f(\alpha, \beta) \geqq 0$ $(a \leqq \alpha \leqq \beta \leqq b)$ és $f(\alpha, \beta) = 0$ akkor és csak akkor, ha $\alpha = \beta$, n-et minden határon túl növelve a tételben szereplő beosztások az $[a, b]$ intervallumnak egy minden határon túl sűrűsödő beosztás-sorozatát adják, azaz bennük a leghosszabb részintervallum hossza 0-hoz tart. Rögzített n esetén ugyanis a legrövidebb intervallum hossza nem lehet nagyobb $\frac{b-a}{n}$-nél. Így a legrövidebb intervallumhoz tartozó függvényértékek a folytonosság miatt 0-hoz tartanak. Minthogy a részintervallumokhoz tartozó függvényértékek egyenlők, azért a leghosszabb intervallumhoz tartozó függvényértékek is 0-hoz tartanak. Ismét a folytonosság miatt és azért, mert $f(\alpha, \beta) = 0$ feltevésünk szerint csak akkor lehet, ha $\alpha = \beta$, a leghosszabb intervallum hosszának is 0-hoz kell tartania. A Fejes Tóth idézett dolgozatában szereplő $f(\alpha, \beta)$ intervallumfüggvény a $k^{(p+1)}(s) \neq 0$ $(0 \leqq s \leqq L)$ feltétel miatt rendelkezik ezzel a tulajdonsággal is.

3. Most térjünk rá tételünk bizonyítására. A bizonyítást két lépésben végezzük. Először tegyük fel még azt is, hogy $f(a, \alpha) > 0$, ha $a < \alpha \leqq b$. Ekkor a tételben szereplő beosztás létezésének bizonyítása úgy megy mint B. Fuglede—B. Jessen idézett dolgozatában. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $a = 0$, $b = 1$. Ellenkező esetben ugyanis az $y = \frac{x-a}{b-a}$ transzformációval az $[a, b]$ intervallumot vigyük át a $[0, 1]$ intervallumba, azaz $f(\alpha, \beta)$ helyett vegyük a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett

$$\bar{f}(\alpha, \beta) = f(a + (b-a)\alpha, a + (b-a)\beta) \quad (0 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq 1)$$

intervallumfüggvényt. Ha $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n = 1$ a $[0, 1]$ intervallumnak olyan beosztása, melyre $\bar{f}(\alpha_0, \alpha_1) = \cdots = \bar{f}(\alpha_{n-1}, \alpha_n)$, akkor az $\bar{\alpha}_i = a + (b-a)\alpha_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ számok az $[a, b]$ intervallumnak a kívánt beosztását adják.

Jelöljön mostmár T egy $(n-1)$-dimenziós szimplexet, melyben vezessünk be baricentrikus koordinátákat. Jelöljük azokat x_ν-vel $(\nu = 1, \ldots, n)$, akkor T pontjaira $x_\nu \geqq 0$, $\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu = 1$. A $[0, 1]$ intervallum $0 = \alpha_0 \leqq \alpha_1 \leqq \cdots \leqq \alpha_n = 1$ beosztásainak a halmazát kölcsönösen egyértelmű módon képezzük le T-re

$\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1} = x_\nu$-t téve ($\nu = 1, \ldots, n$). Legyen $p(1 \leqq p \leqq n)$ pozitív egész szám. Jelöljük A_p-vel a $[0, 1]$ intervallum olyan beosztásainak a képhalmazát, mely beosztásokra

$$(1) \qquad \max_{1 \leqq \nu \leqq n} f(\alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu) = f(\alpha_{p-1}, \alpha_p).$$

Az $f(\alpha, \beta)$ függvény folytonossága miatt A_p zárt halmaz. A_p nyílvánvalóan tartalmazza a T szimplex $x_p = 1$, $x_\nu = 0$ $(\nu \neq p)$ csúcsát, de nincs közös pontja az $x_p = 0$ szemközti oldallal, minthogy (1)-ben a maximum biztosan pozitív az $f(0, \alpha) > 0$ $(0 < \alpha \leqq 1)$ feltétel miatt. Minthogy az A_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$ halmazok egyesítése T, azért Sperner egy ismert tétele szerint (lásd pl. P. Alexandroff und H. Hopf, *Topologie*, Berlin, 1935, 378. oldal) az A_ν halmazoknak van közös pontja. Egy közös pontnak megfelelő beosztás legyen $0 = \alpha_0 \leqq \alpha_1 \leqq \cdots \leqq \alpha_n = 1$. Erre A_p értelmezése folytán (1) minden p-re $(p = 1, \ldots, n)$ fennáll, azért

$$f(\alpha_0, \alpha_1) = \cdots = f(\alpha_{n-1}, \alpha_n).$$

Még azt kell belátnunk, hogy $\alpha_0 \leqq \alpha_1 \leqq \cdots \leqq \alpha_n$-ben egyenlőség sehol nem állhat. De ha valamilyen i-re $(0 \leqq i \leqq n-1)$ $\alpha_i = \alpha_{i+1}$ lenne, akkor $f(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = 0$ miatt $f(\alpha_0, \alpha_1) = \cdots = f(\alpha_{n-1}, \alpha_n) = 0$, ami azonban ellenmond annak, hogy (1)-ben a maximum pozitív. Ezzel tételünket erre az esetre bebizonyítottuk.

Most áttérünk az általános esetre, amit egy fogással visszavezetünk az előbbire.

Legyen tehát $f(\alpha, \beta)$ egy $[a, b]$ intervallumon értelmezett folytonos intervallumfüggvény és $f(a, b) \neq 0$. Feltehető, hogy $f(a, b) > 0$. (Ha nem így lenne, akkor $f(\alpha, \beta)$ helyett vegyük a $-f(\alpha, \beta)$ függvényt.) A folytonosság miatt található olyan $\bar{a}$ szám $(a \leqq \bar{a} < b)$, hogy $f(a, \alpha) > 0$, ha $\bar{a} < \alpha \leqq b$ és $f(a, \bar{a}) = 0$. Tekintsük az $[\bar{a}, b]$ intervallumon a következő módon értelmezett intervallumfüggvényt:

$$\bar{f}(\alpha, \beta) = \begin{cases} f(\alpha, \beta), & \text{ha } \bar{a} < \alpha \leqq \beta \leqq b \\ f(a, \beta), & \text{ha } \alpha = \bar{a}. \end{cases}$$

$\bar{f}(\alpha, \beta)$-ra az $[\bar{a}, b]$ intervallumon teljesülnek a már elintézett eset feltételei. Van tehát az $[\bar{a}, b]$ intervallumnak olyan $\bar{a} = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n = b$ beosztása, melyre fennáll:

$$\bar{f}(\bar{a}, \alpha_1) = \bar{f}(\alpha_1, \alpha_2) = \cdots = \bar{f}(\alpha_{n-1}, b).$$

Így $\bar{f}(\alpha, \beta)$ értelmezése folytán

$$f(a, \alpha_1) = f(\alpha_1, \alpha_2) = \cdots = f(\alpha_{n-1}, b),$$

azaz $a < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n = b$ az $[a, b]$ intervallumnak a kívánt beosztása.

4. A tétel feltételei között szereplő $f[a, b] \neq 0$ feltétel lényeges. Ha $f[a, b] = 0$, akkor a tétel állítása általában nem igaz. Hogy erről meggyőződjünk, tekintsük a következő intervallumfüggvényt:

$$f(\alpha, \beta) = (\beta - \alpha) \min(\alpha, 1 - \beta) \quad (0 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq 1).$$

Ez nyilvánvalóan folytonos és $f(0, 1) = 0$. Könnyen belátható, hogy ha $n \geqq 3$, akkor nincs a $[0, 1]$ intervallumnak olyan $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n = 1$ beosztása, hogy

$$f(\alpha_0, \alpha_1) = f(\alpha_1, \alpha_2) = \cdots = f(\alpha_{n-1}, \alpha_n)$$

fennálljon, mert $f(\alpha_0, \alpha_1) = f(\alpha_{n-1}, \alpha_n) = 0$ mindig, míg $f(\alpha, \beta) \neq 0$, ha $0 < \alpha < \beta < 1$.

Felvetődik a kérdés: nem terjeszthető-e ki tételünk olyan $f(\alpha, \beta)$ intervallumfüggvényekre is, amelyeknél $f(\alpha, \beta) = 0$ $(a \leqq \alpha \leqq \beta \leqq b)$ csak akkor áll fenn, ha $\alpha = a$, $\beta = b$ vagy ha $\alpha = \beta$. Példákkal fogjuk megmutatni, hogy tételünk általában ilyen intervallumfüggvényekre sem igaz.

Először konstruálunk olyan a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett folytonos intervallumfüggvényt, melynek értéke csak az egész intervallumon lesz 0, vagy ha $\alpha = \beta$, és nincs a $[0, 1]$ intervallumnak két részre való olyan $0 < \gamma < 1$ beosztása, melyre $f(0, \gamma) = f(\gamma, 1)$ fennállna. Keressük $f(\alpha, \beta)$-t a következő alakban:

$$f(\alpha, \beta) = (\beta - \alpha)[f_1(\alpha) + f_2(\beta)] \quad (0 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq 1),$$

ahol az $f_1(x)$, $f_2(x)$, a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett folytonos függvényeket kell még alkalmasan megválasztanunk. $f(0, 1) = 0$ biztosítására legyen

$$f_1(0) = f_1(1) = f_2(0) = f_2(1) = 0.$$

Ha egy a $0 < \gamma < 1$ feltételt teljesítő γ számra fennállna

$$f(0, \gamma) = f(\gamma, 1), \tag{2}$$

akkor fenn kellene állnia a következő egyenletnek:

$$\gamma f_2(\gamma) = (1 - \gamma) f_1(\gamma), \tag{3}$$

azaz

$$\frac{\gamma}{1 - \gamma} = \frac{f_1(\gamma)}{f_2(\gamma)}.$$

Minthogy $0 < \gamma < 1$ esetén $\frac{\gamma}{1 - \gamma} < \frac{1}{1 - \gamma}$, azért ha

$$\frac{f_1(\gamma)}{f_2(\gamma)} = \frac{1}{1 - \gamma}, \text{ vagyis } f_2(\gamma) = (1 - \gamma) f_1(\gamma),$$

akkor (3), és így (2) is egyetlen $0 < \gamma < 1$ értékre nem állhat fenn. Az

$$f(\alpha, \beta) = (\beta - \alpha)[f_1(\alpha) + (1 - \beta) f_1(\beta)] \quad (0 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq 1)$$

függvény tehát minden folytonos, csak a $[0, 1]$ intervallum végpontjaiban eltűnő $f_1(x)$ függvény esetén rendelkezik a kívánt tulajdonsággal.

Valamivel komplikáltabbnak látszik hasonló példa megadása az $n = 3$ esetre, amit elsősorban az tesz érdekessé, hogy a három részintervallum között ekkor egy belső intervallum is fellép. A következőkben csak vázolni kívánjuk, hogyan lehet a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett olyan folytonos, nemnegatív intervallumfüggvényt találni, melynek értéke csak az egész intervallumon 0, vagy ha $\alpha = \beta$, és nem lehet a $[0, 1]$ intervallumot úgy három részre osztani, hogy az egyes részintervallumokon értékei egyenlők legyenek.

Most $f(\alpha, \beta)$-t a következő alakban keressük:

$$f(\alpha, \beta) = [f(\alpha) + f(\beta)] g(\alpha, \beta) \quad (0 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq 1), \tag{4}$$

ahol $f(x)$ a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett nem-negatív, az $x = \frac{1}{2}$ pontra szimetrikus, folytonos és csak az intervallum végpontjaiban eltűnő függvény. A $g(\alpha, \beta)$ függvényt kell még alkalmasan választanunk, hogy $f(\alpha, \beta)$ a kívánt tulajdonságokkal rendelkezzék. Ha $g(\alpha, \beta)$-t úgy választjuk, hogy $g(0, \alpha)= = g(\beta, 1)=1$ $(0 \leqq \alpha \leqq 1,\ 0 \leqq \beta \leqq 1)$, legyen, akkor (4) szerint $f(0, \alpha)=f(\beta, 1)$ csak akkor állhat fenn, ha $\alpha=\beta$ vagy $\alpha=1-\beta$. Számunkra csak az $\alpha=1-\beta$ érdekes. Hogy ekkor $f(0, \alpha)=f(\alpha, \beta)$ ne állhason fenn, azt a következőképpen biztosíthatjuk. Minthogy ekkor (4) szerint

$$f(0, \alpha)=[f(0)+f(\alpha)]\, g(0, \alpha)=f(\alpha)$$

és

$$f(\alpha, \beta)=[f(\alpha)+f(1-\alpha)]\, g(\alpha, \beta)=2 f(\alpha)\, g(\alpha, \beta),$$

azért $f(0, \alpha)=f(\alpha, \beta)$ $(\alpha=1-\beta)$ biztosan nem állhat fenn, ha ekkor $g(\alpha, \beta)<\frac{1}{2}$. Az $f(\alpha, \beta)$ folytonosságának biztosítására még azt is ki kell kötnünk, hogy $g(\alpha, \alpha)=0$ $(0<\alpha<1)$ legyen.

Az eddigiek szerint tehát $g(\alpha, \beta)$-nak olyan a $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ pontok által meghatározott háromszögön értelmezett kétváltozós függvénynek kell lennie, melyre fennállnak a következők:

1. $g(\alpha, \beta)=0$, ha $\alpha=\beta$, $0<\alpha<1$;
2. $g(\alpha, \beta)=1$, ha $\alpha=0$ vagy $\beta=1$;
3. $g(\alpha, \beta)<\frac{1}{2}$, ha $\alpha+\beta=1$, $\alpha>0$.

A 3. követelmény teljesül, ha az $\alpha=1-\beta$ egyenes mentén $g(\alpha, \beta)$ az $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ és $\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$ pontokat összekötő egyenes. Ezzel definiáltuk $g(\alpha, \beta)$-t a háromszög oldalain és az átfogójához tartozó magasságán. Terjesszük ki mostmár $g(\alpha, \beta)$ értelmezését az egész háromszögre úgy, hogy a háromszög belsejében értéke pozitív legyen és a csúcsok kivételével az egész háromszögön folytonos legyen. Ilyen kiterjesztés nyilvánvalóan lehetséges, hiszen csak a már rögzített egyeneseken kell alkalmas felületeket „átfektetni". A fentebb rögzített $f(x)$ és az ilymódon mostmár teljesen meghatározott $g(\alpha, \beta)$ függvényekkel definiált $f(\alpha, \beta)$ intervallumfüggvény folytonos is lesz, minthogy a háromszög csúcsai környezetében $g(\alpha, \beta)$ korlátos és ott a másik, folytonos tényező értéke 0.

Ezen példák után nagyon valószínűnek látszik, hogy minden $n(\geqq 2)$ pozitív egész számhoz megadható olyan a $[0,1]$ intervallumon értelmezett folytonos $f_n(\alpha, \beta)$ intervallumfüggvény, melynek értéke csak az egész intervallumon 0, vagy ha $\alpha=\beta$, és nincs a $[0,1]$ intervallumnak n részre való olyan felosztása, hogy az egyes részintervallumokhoz tartozó függvényértékek egyenlők. Nem sikerült azonban olyan egyszerű eljárást találnunk, mellyel tetszőlegesen adott n-hez ilyen függvényt lehetne konstruálni.

Ezúton mondok köszönetet Szőkefalvi-Nagy Béla professzornak, aki a dolgozatban tárgyalt problémára a figyelmemet felhívta.

IRODALOM

[1] Fejes Tóth László, Annährung von Kurven durch Kurvenbogenzüge, Publicationes Mathemeticae, Debrecen, 3, 278—279, 1954.

[2] B. Fuglede, B. Jessen, Mathematica Scandinavica, 1, 311—312, 1953.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ФУНКЦИЙ ОТРЕЗКА

Т. Серени

Под функцией отрезка, определенной на отрезке $[a, b]$, будем понимать правило, ставящее в соответствие каждому отрезку $[\alpha, \beta]$ $(a \leqq \alpha \leqq \beta \leqq b)$ некоторое вещественное число $f(\alpha, \beta)$. Будем говорить, что функция отрезка $f(\alpha, \beta)$ непрерывна, если при $\alpha \to \alpha_0, \beta \to \beta_0$ $(a \leqq \alpha \leqq \beta \leqq b)$ имеет место $f(\alpha, \beta) \to f(\alpha_0, \beta_0)$, причем для $\alpha = \beta$ имеем $f(\alpha, \beta) = 0$.

Имеет место следующая теорема:

Если $f(\alpha, \beta)$ — функция отрезка, определенная на отрезке $[a, b]$ и n — некоторое натуральное число, далее $f(a, b) \neq 0$, то существует такое разбиение $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n = b$ отрезка $[a, b]$ для которого

$$f(\alpha_0, \alpha_1) = \cdots = f(\alpha_{n-1}, \alpha_n).$$

Если $f(a, b) = 0$, то теорема вообще говоря, неверна.

ÜBER EINE EIGENSCHAFT VON INTERVALLFUNKTIONEN

von

T. SZERÉNYI

Wir verstehen unter einer im Intervall $[a, b]$ definierten Intervallfunktion ein Gesetz, das jedem Intervall $[\alpha, \beta]$ $(a \leqq \alpha \leqq \beta \leqq b)$ eine bestimmte reelle Zahl zuordnet. Die Intervallfunktion $f(\alpha, \beta)$ heisst stetig, wenn für $\alpha \to \alpha_0, \beta \to \beta_0$ $(a \leqq \alpha \leqq \beta \leqq b)$ $f(\alpha, \beta) \to f(\alpha_0, \beta_0)$ und für $\alpha = \beta$ $f(\alpha, \beta) = 0$ gilt.

Es gilt der folgende Satz:

Ist $f(\alpha, \beta)$ eine im Intervall $[a, b]$ definierte, stetige Intervallfunktion und $f(a, b) \neq 0$, dann kann für jede natürliche Zahl n eine Einteilung $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n = b$ von Intervall $[a, b]$ angegeben werden, für die

$$f(\alpha_0, \alpha_1) = f(\alpha_1, \alpha_2) = \cdots = f(\alpha_{n-1}, \alpha_n)$$

ist.

Wenn $f(a, b) = 0$ ist, so gilt der Satz im allgemeinen nicht.